LA QUANTITÀ DI MOTO

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi - scritti con Lyx.

Esercizio 1. A che velocità deve viaggiare un'auto di massa $816\,kg$ per avere la stessa quantità di moto di un'auto di massa $2650\,kg$ che avanza alla velocità di $16,0\,\frac{km}{h}$?

Soluzione. La quantità di moto di un corpo è definita dal prodotto della sua massa e della velocità con la quale si muove, $p = mv$, per cui

$$p_1 = p_2 \quad m_1 v_1 = m_2 v_2$$

da cui

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 = \frac{2650\,kg}{816\,kg} \times \frac{16,0}{3,6}\frac{m}{s} = 14,4\,\frac{m}{s} = 52,0\,\frac{km}{h}$$

Esercizio 2. Un camion di massa $2000\,kg$ che viaggia verso nord alla velocità di $40,0\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ curva verso est e accelera fino alla velocità di $50,0\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$. Trovare modulo, direzione e verso della variazione della sua quantità di moto.

Soluzione. La massa, grandezza scalare, rimane invariata, mentre cambia la velocità, grandezza vettoriale. I vettori delle due velocità sono perpendicolari tra loro, e si ha,

$$\overrightarrow{p}_1 = 2000\,kg \times \left(40,0\,\tfrac{km}{h}\right)\overrightarrow{j} = 8,00 \cdot 10^4\,kg\tfrac{km}{h}\overrightarrow{j} \quad \overrightarrow{p}_1 = 2000\,kg \times \left(50,0\,\tfrac{km}{h}\right)\overrightarrow{i} = 1,00 \cdot 10^5\,kg\tfrac{km}{h}\overrightarrow{i}$$

$$\Delta\overrightarrow{p} = 1,00 \cdot 10^5\,kg\frac{km}{h}\overrightarrow{i} - 8,00 \cdot 10^4\,kg\frac{km}{h}\overrightarrow{j}$$

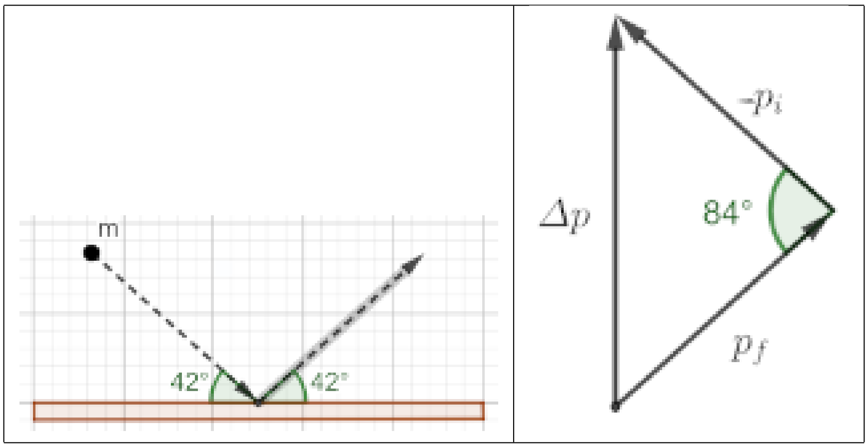
per cui

$$|\Delta\overrightarrow{p}| = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2} = \sqrt{1,00 \cdot 10^{10} + 6,4 \cdot 10^9} = 1,28 \cdot 10^5\,kg\frac{km}{h}$$

La direzione sarà caratterizzata dall'angolo

$$\beta = \arctan\frac{8,00 \cdot 10^4}{1,00 \cdot 10^5} = \arctan\frac{4}{5} = \arctan 0,8 = 38,7^\circ$$

Esercizio 3. Un oggetto di massa $4,88\,kg$ colpisce una lamiera d'acciaio alla velocità di $31,4\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ in direzione che forma un angolo di $42,0^\circ$ rispetto al piano della lamiera: rimbalza alla stessa velocità e con lo stesso angolo. Trovare, in intensità, direzione e verso, la variazione della quantità di moto (o momento).



Soluzione. Si deve trovare il vettore differenza tra i due momenti.

$$\Delta p = \overrightarrow{p_f} - \overrightarrow{p_i}$$

Rappresentiamo graficamente l'operazione tra i due vettori. Calcoleremo poi la differenza con il teorema del coseno (cioè un'estensione del th. di Pitagora al caso dei triangoli qualunque). Calcoliamo prima il modulo uguale dei due momenti

$$p_{i-f} = 4,88\,kg \times 31,4\,\frac{m}{s} = 153\,kg\frac{m}{s}$$

il teorema trigonometrico richiamato stabilisce che

$$\Delta p = \sqrt{153^2 + 153^2 - 2 \times 153 \times 153 \times \cos 84^\circ} = 205\,kg\frac{m}{s}$$

Esercizio 4. Si sta collaudando il paraurti di un nuovo modello di auto. Il veicolo di massa $2300\,kg$ viene mandato a sbattere contro il plinto di un ponte alla velocità di $15\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ e si ferma dopo $0,54\,s$. Trovare la forza media che ha agito sul veicolo durante l'urto.

Soluzione. In questo caso abbiamo a che fare con una forza molto intensa che agisce per un tempo molto breve, una cosiddetta forza impulsiva. Tale forza media è uguale alla differenza è uguale alla differenza delle quantità di moto iniziale e finale divisa per il tempo. La quantità di moto prima dell'urto è pari a

$$p_i = 2300 \times 15 = 34500\,kg\frac{m}{s}$$

mentre la quantità di moto finale è $p_f = 0$ in quanto l'auto si è fermata. Pertanto

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0 - 34500\ kg\frac{m}{s}}{0,54\,s} = -63889\,N$$

Esercizio 5. Una palla di massa m e velocità v colpisce perpendicolarmente una parete e rimbalza con velocità invariata. (a) Se la durata dell'urto è Δt, trovare la forza media esercitata dalla palla sulla parete. (b) Valutare numericamente questa forza per una palla di gomma con massa $140\,g$ alla velocità di $7,8\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ se la durata dell'urto è di $3,9\,ms$.

Soluzione. La forza media è data dalla variazione della quantità di moto nel tempo

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t}$$

ma la quantità di moto iniziale e finale sono in modulo uguali ma di verso opposto, per cui

$$\overline{F} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t}$$

Con i valori delle grandezze assegnati si ha

$$\overline{F} = \frac{2 \times 0,140\,kg \times 7,8\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}}{3,9 \cdot 10^{-3} s} = 560\,N$$

Esercizio 6. Un giocatore di golf colpisce una palla facendola partire con una velocità iniziale di $52,2\,{}^{m}/_{s}$ e direzione inclinata di 30° sul piano orizzontale. Supponendo che la massa della palla sia $46,0\,g$ e che la mazza e la palla stiano a contatto per $1,20\,ms$, trovare (a) l'impulso conferito alla palla; (b) l'impulso conferito alla mazza e (c) la forza media esercitata dalla mazza sulla palla.

Soluzione. Ricordiamo che l'impulso, J, è definito come la variazione della quantità di moto, per cui sapendo che la quantità di moto della palla prima dell'urto è zero, è infatti ferma, e che il vettore quantità di moto ha la stessa direzione della velocità

$$J = 52,2 \times 0,046 - 0 = 2,40\,kg\frac{m}{s}$$

l'impulso conferito alla mazza sarà in modulo lo stesso ma in verso contrario, e la forza media

$$\overline{F} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{2,40\,kg\frac{m}{s}}{1,2 \cdot 10^{-3}s} = 2000\,N$$

Esercizio 7. Una palla da baseball di massa $150\,g$ lanciata alla velocità di $41,6\,{}^{m}/_{s}$ è ribattuta indietro in direzione del lanciatore alla velocità di $61,5\,{}^{m}/_{s}$. La mazza rimane a contatto con la palla per $4,70\,ms$. Trovare la forza media esercitata dalla mazza sulla palla.

Soluzione. In questo caso le velocità in modulo iniziale e finale sono diverse ma la direzione è la stessa ma con verso contrario.

$$\overline{F} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{0,150\,kg \times (61,5 + 41,6)\ \frac{m}{s}}{4,70 \cdot 10^{-3}s} = 3290\,N$$

Esercizio 8. Un urto della durata di $27,0\,ms$ applica una forza media di $984\,N$ a una palla d'acciaio di massa $420\,g$ in movimento alla velocità di $13,8\,{}^{m}/_{s}$. Supposto che la forza sia diretta in verso opposto al moto della palla, trovare la sua velocità finale.

Soluzione. La forza media è data da

$$\overline{F} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{m\,(v_f - v_i)}{\Delta t}$$

Se la palla viene respinta, avrà una velocità di verso opposto, per cui

$$984\,N = \frac{0,420\,kg\,(v_f + 13,8\,{}^{m}/_{s})}{27,0 \cdot 10^{-3}\,s}$$

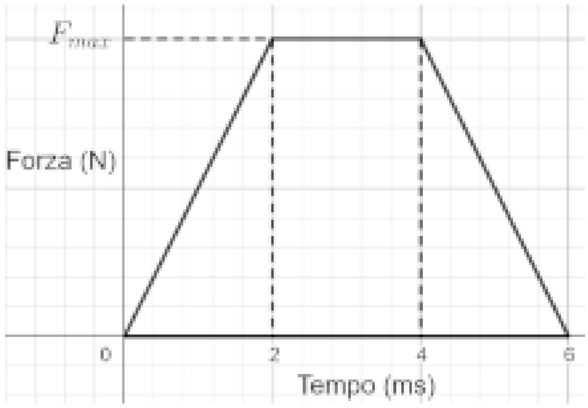
risolvendo rispetto a v_f si ha

$$\frac{984\,N \times 27,0 \cdot 10^{-3}\,s}{0,420\,kg} - 13,8\,{}^{m}/_{s} = v_f$$

da cui, prendendo come positivo il verso della velocità prima dell'urto

$$v_f = -49,5\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 9. Il grafico della figura sotto rappresenta in modo approssimato l'intensità di una forza in funzione del tempo durante l'urto in direzione perpendicolare contro una parete, alla velocità iniziale di 32 m/s, di una palla da tennis di massa 58 g, che rimbalza alla stessa velocità in verso opposto. Trovare il valore di F_{max}, la massima forza di contatto durante l'urto.



Soluzione. La palla dopo l'urto rimbalza con la stessa velocità in modulo ma opposta in verso, per cui

$$\Delta p = mv - (-mv) = 2mv = 2 \times 0,058\,kg \times 32\,\frac{m}{s} = 3,7\,kg\frac{m}{s}$$

ma la variazione della quantità di moto è uguale alla forza impulsiva media esercitata durante l'urto. In questo caso l'impulso, J, è l'area del trapezio rappresentato in figura in un grafico tempo-forza. L'area è

$$J = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h = \frac{(6\,ms + 2\,ms) \times F_{max}}{2} = 4\,ms \times F_{max}$$

da cui

$$F_{max} = \frac{\Delta p}{J} = \frac{3,7\,kg\frac{m}{s}}{4\,ms} 928\,N$$

Esercizio 10. Due componenti di un veicolo spaziale, aventi masse di 1200 kg e 1800 kg, sono separati dalla detonazione di un bullone esplosivo che li teneva uniti. L'intensità dell'impulso applicato a ciascuno è di 300 $N \cdot s$. Trovare la velocità relativa di allontanamento delle due parti.

Soluzione. La velocità iniziale dei due veicoli è la stessa essendo uniti tra loro. L'impulso esprime la variazione della quantità di moto per cui le velocità finali dei veicoli separati sono date dal rapporto tra impulso e la relativa massa, cioè $v_{if} = J/m_1$e $v_{2f} = J/m_2$. I due veicoli dopo il distacco si muovono nella stessa direzione ma in versi opposti, per cui la velocità relativa è

$$v_{rel} = v_{1f} - (-v_{2f}) = \frac{300\,N \cdot s}{1200\,kg} + \frac{300\,N \cdot s}{1800\,kg} = 0,42\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 11. Un esperto di karate rompe con un colpo di mano una tavola di pino dello spessore di $2,2\,cm$. Dalle immagini risulta che la mano, della massa di 540 g, ha colpito la superficie superiore della tavola alla velocità iniziale di $9,5\,m/s$ e si è arrestata $2,8\,cm$ sotto quel livello. Trovare la durata dell'urto (ammesso che la forza sia rimasta costante) e la forza media applicata.

Soluzione. La quantità di moto iniziale è pari a

$$p = mv_i = 0,540 \times 9,5 = 5,1\,kg\frac{m}{s}$$

La mano ha percorso un tratto pari a $d = 2,8\,cm$ dopo di che si è fermata. La velocità media per il tempo in cui la mano è rimasta a contatto con la parte superiore della tavola è uguale alla metà della velocità iniziale, cioè

$$\overline{v} = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{0 + 9,5}{2} = 4,8\,\frac{m}{s}$$

Il tempo di contatto è pertanto

$$t = \frac{d}{v} = \frac{0,028\,m}{4,8\,\frac{m}{s}} = 5,8\,\cdot 10^{-3}\,s = 5,8\,ms$$

Ora, l'impulso fornito alla tavola è pari alla differenza della quantità di moto della mano; ma la quantità di moto finale è nulla per cui, $J = 0,51\,kg\frac{m}{s}$. Allora

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{5,1}{5,8\,\cdot 10^{-3}\,s} = 880\,N$$

Esercizio 12. Una sonda spaziale senza equipaggio da $2500\,kg$ è in moto rettilineo alla velocità di $300\,{}^{m}/_{s}$. Un motore a razzo della sonda si accende per $65,0\,s$ dando una spinta di $3000\,N$. Trovare la variazione di intensità della quantità di moto se la spinta è diretta all'indietro. (La massa del carburante emesso è considerata trascurabile rispetto alla massa della sonda).

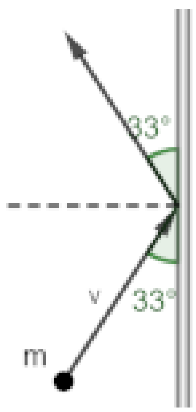
Soluzione. La precisazione della trascurabilità della massa del carburante indica che studiamo una situazione con massa costante. La quantità iniziale della sonda è pari a

$$p_i = 2500\,kg \times 300\,\frac{m}{s} = 7,50 \cdot 10^5\,kg\frac{m}{s}$$

Se la spinta è diretta all'indietro, per la terza legge della dinamica, la sonda verrà accelerata in avanti e ciò accrescerà la sua velocità finale. Poiché $J = F\Delta t$, avremo

$$J = \Delta p = 3000\,N \times 65,0\,s = 1,95 \cdot 10^5\,kg\frac{m}{s}$$

Esercizio 13. Una palla di massa $325\,g$ colpisce una parete alla velocità di $6,22\,{}^{m}/_{s}$ con una direzione formante un angolo $\theta = 33,0°$ rispetto alla superficie e rimbalza con la stessa velocità e lo stesso angolo, come in figura, dopo essere rimasta a contatto con la parete per $10,4\,ms$. Trovare l'impulso della palla e la forza media esercitata dalla palla sulla parete.



Soluzione. L'impulso è la variazione della quantità moto. La pallina subisce un urto che si può descrivere come una riflessione sulla superficie. Scomponendo il vettore velocità, si osserva che l'unica componente che varia è quella perpendicolare al muro (è uguale in modulo ma opposta in verso); pertanto

$$\overrightarrow{J} = \Delta\overrightarrow{p} = -2\left(0,325\,kg \times 6,22\,\frac{m}{s} \times \sin 33^\circ\right)\overrightarrow{j} = -2,20\,kg\frac{m}{s}$$

La forza media è espressa da

$$F_m = \frac{J}{\Delta t} = \frac{-2,20\,kg\frac{m}{s}}{10,4 \cdot 10^{-3}\,s} = 212\,N$$

Esercizio 14. Un uomo del peso di $860\,N$ stando in piedi su una superficie di attrito trascurabile, calcia in avanti un sassolino pesante $0,70\,N$ che si trova vicino al suo piede, imprimendogli una velocità di $3,8\,{}^{m}\!/_{s}$. Trovare la velocità acquisita dall'uomo a seguito dell'urto.

Soluzione. In assenza di forze dispersive come l'attrito, la quantità di moto iniziale e finale devono essere uguali (legge di conservazione della quantità di moto). Inizialmente l'uomo e il sasso sono fermi e la quantità di moto è nulla. La quantità di moto finale dovrà essere pertanto nulla e quella del sasso dovrà avere valore uguale e di segno opposto a quella dell'uomo. Quindi, la velocità finale dell'uomo sarà opposta a quella del sasso.

$$m_u v_u + m_s v_s = 0$$

da cui

$$v_u = -\frac{m_s}{m_u} v_s$$

Troviamo le masse dei due corpi

$$m_u = \frac{860\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 88\,kg \quad m_s = \frac{0{,}70\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 0,07\,kg$$

avremo allora

$$v_u = -\frac{0,07\,kg}{88\,kg} \times 3,8\,\frac{m}{s} = 3,0 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 15. Un uomo di massa $75,2\,kg$ viaggia su un carrello di massa $36,8\,kg$ alla velocità di $2,33\,{}^{m}\!/_{s}$. L'uomo salta dal carrello in modo che la sua velocità sia nulla. Trovare la variazione di velocità del carrello così prodotta.

Soluzione. La quantità di moto totale iniziale è

$$p^i_{u+c} = (75,2 + 36,8)\ kg \times 2,33\,\frac{m}{s} = 261\,kg\frac{m}{s}$$

Se la velocità finale dell'uomo è nulla tutta la quantità di moto è posseduta dal carrello, per cui

$$p^f_c = 261 = 36,8 \cdot v_{fc}$$

da cui

$$v_{fc} = \frac{261}{36,8} = 7,10\,\frac{m}{s}$$

e la differenza tra le due velocità sarà

$$7,10 - 2,33 = 4,77\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 16. Un carro ferroviario piatto di massa M corre senza attrito su un binario rettilineo orizzontale. All'inizio una persona di massa m sta in piedi sul vagone che si muove verso destra con velocità v_0. Trovare la variazione di velocità del carro se l'uomo corre verso sinistra alla velocità relativa v_{rel} rispetto al carro subito prima di saltare giù dall'estremità di sinistra.

Soluzione. Per la conservazione della quantità di moto si ha

$$p_{f,u} + p_{f,c} = p_{i,u} + p_{i,c}$$

per cui

$$m\left(v_{f,c} - v_{rel}\right) + Mv_{f,c} = (M+m)\, v_{i,c}$$

da cui

$$(m+M)\, v_{f,c} - mv_{rel} = (M+m)\, v_{i,c}$$

cioè

$$\Delta v_c = \frac{mv_{rel}}{M+m}$$

Esercizio 17. Un veicolo spaziale che sta viaggiando a 3860 kn/h rispetto alla Terra sgancia il motore di uno stadio che ha esaurito il propellente, proiettandolo all'indietro alla velocità relativa di 125 km/h rispetto al modulo di comando. La massa del motore è quattro volte la massa del modulo. Trovare la velocità del modulo dopo la separazione.

Soluzione. Applichiamo ancora la legge di conservazione della quantità di moto.

$$p_{f,m} + p_{f,v} = p_{i,m} + p_{i,v}$$

$$m_m\left(v_{f,v} - v_{rel}\right) + m_v v_{f,v} + = \left(m_v + m_m\right) v_{i,v}$$

ma sappiamo che $m_m = 4m_v$, per cui

$$m_v v_{f,v} + 4m_v\left(v_{f,v} - v_{rel}\right) = 5m_v v_{i,v}$$

$$5m_v v_{f,v} - 4m_v v_{rel} = 5m_v v_{i,v}$$

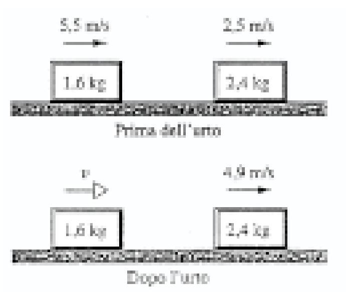
sostituendo i valori assegnati e dividendo tutto per m_v

$$v_{f,v} = \frac{5 \times 3860\,\frac{km}{h} + 4 \times 125\,\frac{km}{h}}{5}$$

da cui

$$v_{f,v} = 3960\,\frac{km}{h}$$

Esercizio 18. I blocchi in figura slittano verso destra senza attrito. Trovare la velocità v dopo l'urto del blocco di massa $1,6\,kg$.



Soluzione. Il blocco di massa minore ha una velocità maggiore e urta il blocco che lo precede. Dopo l'urto, si ha un incremento della velocità del blocco di massa maggiore. Applicando la legge di conservazione della quantità di moto totale del sistema isolato, si ha

$$(1,6 \times 5,5)\ kg\frac{m}{s} + (2,4 \times 2,5)\ kg\frac{m}{s} = (1,6 \times v)\ kg\frac{m}{s} + (2,4 \times 4,9)\ kg\frac{m}{s}$$

Ricaviamo v

$$14,8 = 1,6v + 11,8$$

da cui

$$v = \frac{14,8 - 11,8}{1,6} = 1,9\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 19. Un proiettile di massa $5,18\,g$ colpisce alla velocità di $672\,\mathrm{m/s}$ un blocco di legno di massa $715\,g$ fermo su una superficie senza attrito, ed esce dall'urto alla velocità ridotta di $428\,\mathrm{m/s}$ nella stessa direzione. Trovare la velocità finale del blocco.

Soluzione. Il proiettile passa attraverso il blocco di legno cedendogli una parte della propria quantità di moto e fornendo quindi al pezzo di legno una velocità diretta nello stesso verso. Pertanto

$$(5,18 \times 672)\ g\frac{m}{s} + 0 = (5,18 \times 428)\ g\frac{m}{s} + (715 \times v)\ g\frac{m}{s}$$

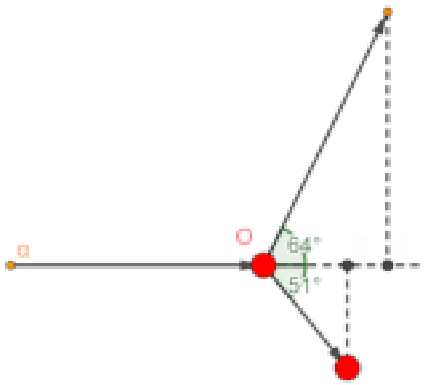
Risolviamo rispetto a v

$$3481 = 2217 + 715v$$

da cui

$$v = \frac{3481 - 2217}{715} = 1,77\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 20. Una particella alfa si scontra con un nucleo di ossigeno inizialmente a riposo. La particella alfa è deviata di un angolo di $64,0°$ rispetto all'asse del suo moto iniziale, mentre il nucleo di ossigeno viene proiettato in direzione formante un angolo di $51,0°$ rispetto al medesimo asse con velocità finale di $1,20 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$. Trovare la velocità finale della particella alfa, la cui massa è di $4,00\,u$ contro una massa di $16,00\,u$ del nucleo di ossigeno.



Soluzione. La quantità di moto iniziale del sistema isolato alfa-ossigeno è data dalla quantità di moto della particella alfa, essendo l'atomo di ossigeno a riposo. Le masse nell'urto rimangono invariate. In questo caso si deve applicare la legge di conservazione della quantità di moto nella sua forma vettoriale. Indichiamo con x l'asse orizzontale in figura e con y la direzione perpendicolare. Ma la componente verticale, y, della quantità di moto iniziale è nulla, per cui le componenti y della quantità di moto finale dovranno essere opposte. Pertanto

$$m_\alpha v_\alpha \sin\theta_\alpha = m_O v_O \sin\theta_O$$

da cui

$$v_\alpha = \frac{m_O v_O \sin\theta_O}{m_\alpha \sin\theta_\alpha} = \frac{16\times 1,20\cdot 10^5\,\frac{m}{s}\times \sin 51°}{4\times\sin 64°} = \frac{3,73\cdot 10^5\,\frac{m}{s}}{0,899} = 4,15\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 21. Due oggetti, A di massa $2,0\,kg$ e B di massa $3,0\,kg$, si urtano. Le velocità iniziali sono $v_{iA} = (15\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{i} + (30\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{j}$ e $v_{iB} = (-10\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{i} + (5,0\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{j}$. Dopo l'urto è $v_{fA} = (-6,0\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{i} + (30\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{j}$. Trovare la velocità finale di B.

Soluzione. In questo esercizio è necessario trattare l'urto come bidimensionale e applicare la legge di conservazione rispetto a due assi di riferimento, x, y, ai quali appartengono i due versori. La legge applicata alla componente x è

$$m_A v_{iAx} + m_B v_{iBx} = m_A v_{fAx} + m_B v_{fBx}$$

da cui

$$v_{fBx} = \frac{m_A v_{iAx} + m_B v_{iBx} - m_A v_{fAx}}{m_B} =$$
$$\frac{2,0\,kg\times 15\,\frac{m}{s} + 3,0\,kg\times(-10,0)\,\frac{m}{s} - 2,0\,kg\times(-6,0)\,\frac{m}{s}}{3,0\,kg} = 4,0\,\frac{m}{s}$$

lo stesso per la componente y

$$m_A v_{iAy} + m_B v_{iBy} = m_A v_{fAy} + m_B v_{fBy}$$

da cui

$$v_{fBy} = \frac{m_A v_{iAy} + m_B v_{iBy} - m_A v_{fAy}}{m_B} =$$
$$\frac{2,0\,kg\times 30\,\frac{m}{s} + 3,0\,kg\times 5,0\,\frac{m}{s} - 2,0\,kg\times 30\,\frac{m}{s}}{3,0\,kg} = 5,0\,\frac{m}{s}$$

(si vede dal calcolo che, rimanendo costante la componente della velocità lungo l'asse y per la particella A, lo stesso dovrà essere per la componente lungo l'asse y della particella B). La velocità finale della particella B sarà quindi

$$v_{fB} = (4,0\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{i} + (5,0\mathrm{m/s})\,\overrightarrow{j}$$

Esercizio 22. Un nucleo radioattivo inizialmente a riposo decade emettendo un elettrone e un neutrino in direzioni formanti un angolo retto. La quantità di moto dell'elettrone è $1,2\cdot 10^{-22}\,kg\cdot\mathrm{m/s}$ e quella del neutrino $6,4\cdot 10^{-23}\,kg\cdot\mathrm{m/s}$. Trovare direzione e intensità della quantità di moto del nucleo residuo.

Soluzione. La quantità di moto del nucleo a riposo è $p_{i,n} = 0$; la somma delle quantità di moto finali delle particelle emesse e del nucleo dovrà pertanto essere ancora uguale a zero. Quindi, la quantità di moto del nucleo dovrà essere uguale in intensità e opposta nel verso a quello della somma delle quantità di moto delle due particelle.

$$p_{f,e} + p, f_{f,\nu} + p_{f,n} = 0$$

Supponiamo che l'elettrone si muova lungo la direzione $+x$ e il neutrino lungo la direzione $+y$. Ricordando che il vettore quantità di moto ha la stessa direzione e verso del vettore velocità, ed essendo le direzioni delle due particelle perpendicolari, l'intensità del vettore somma è

$$p_{e+\nu} = \sqrt{(1,2 \cdot 10^{-22})^2 + (6,4 \cdot 10^{-23})^2} = 1,4 \cdot 10^{-22}\, kg\frac{m}{s}$$

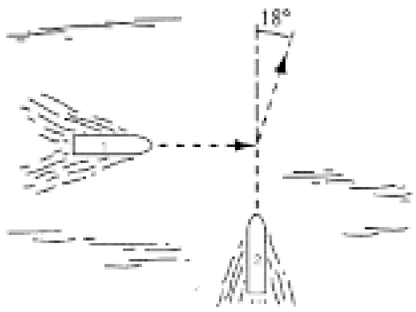
per cui la quantità di moto del nucleo avrà una intensità (l'intensità è il valore assoluto di $\overrightarrow{p}_n$)

$$p_n = 1,4 \cdot 10^{-22}\, kg\frac{m}{s}$$

la direzione è espressa dall'angolo

$$\beta = \arctan\left(180° - \frac{6,4 \cdot 10^{-23}}{1,2 \cdot 10^{-22}}\right) = 152°$$

Esercizio 23. Una chiatta avente massa $1,5 \cdot 10^5\, kg$, mentre in una fitta nebbia discende alla velocità di $6,20\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ la corrente di un fiume, investe sul fianco un'altra chiatta, di massa $2,78 \cdot 10^5\, kg$, che sta attraversando il fiume (vedi figura) alla velocità di $4,30\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. subito dopo l'urto la seconda chiatta devia di $18,0°$ verso valle e la sua velocità aumenta a $5,10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. La corrente del fiume al momento dell'incidente è praticamente nulla. Trovare la velocità e la direzione finali del moto della prima chiatta subito dopo l'urto.



Soluzione. Assumiamo come asse x la retta che rappresenta la direzione della chiatta 1 e come asse y la retta che rappresenta la direzione della chiatta 2. La condizione generale è

$$\overrightarrow{p}_{i,1} + \overrightarrow{p}_{i,2} = \overrightarrow{p}_{f,1} + \overrightarrow{p}_{f,2}$$

Sappiamo che

$$\overrightarrow{p}_{i,1} = \left(1,5 \cdot 10^5\, kg\right) \times (6,20\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}})\, \overrightarrow{i} = \left(9,30 \cdot 10^5\right) \overrightarrow{i}\, kg \cdot {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

$$\overrightarrow{p}_{i,2} = \left(2,78 \cdot 10^5\, kg\right) \times (4,30\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}})\, \overrightarrow{j} = \left(1,20 \cdot 10^6\right) \overrightarrow{j}\, kg \cdot {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

$$\overrightarrow{p}_{f,2} = \left(2,78 \cdot 10^5\, kg\right) \times (5,10\, {}^{m}/_{s}) \left[\sin(18)\, \overrightarrow{i} + \cos(18^\circ)\, \overrightarrow{j}\right] = \left[\left(4,38 \cdot 10^5\right) \overrightarrow{i} + \left(1,35 \cdot 10^6\right) \overrightarrow{j}\right] kg \cdot {}^{m}/_{s}$$

la legge di conservazione richiede

$$\overrightarrow{p}_{f,1} = \left[\left(9,30 \cdot 10^5\right) - \left(4,38 \cdot 10^5\right)\right] \overrightarrow{i} + \left[\left(1,20 \cdot 10^6\right) - \left(1,35 \cdot 10^6\right)\right] \overrightarrow{j} =$$

$$= \left(4,92 \cdot 10^5\right) \overrightarrow{i} - \left(1,50 \cdot 10^5\right) \overrightarrow{j}$$

L'intensità della quantità di moto della chiatta 1 sarà

$$|\overrightarrow{p}_{f,1}| = \sqrt{(4,92 \cdot 10^5)^2 + (-1,50 \cdot 10^5)^2} = 5,14 \cdot 10^5\, kg \cdot {}^{m}/_{s}$$

allora la velocità della chiatta 1 sarà

$$\overrightarrow{v}_{f,1} = \frac{|\overrightarrow{p}_{f,1}|}{m_1} = \frac{5,14 \cdot 10^5\, kg \cdot {}^{m}/_{s}}{1,5 \cdot 10^5\, kg} = 3,43\, \frac{m}{s}$$

e la direzione sarà espressa dall'angolo formato con l'asse x

$$\beta = \arctan\left(\frac{-1,50}{4,92}\right) = -17^\circ$$

Esercizio 24. Due sfere di titanio, aventi uguali velocità, si scontrano frontalmente in modo elastico. Dopo l'urto una delle due sfere, di massa $m_1 = 300\, g$, rimane ferma. Trovare la massa della seconda sfera.

Soluzione. Consideriamo questo come un urto unidimensionale. Sia m_1 la massa della sfera che si ferma dopo l'urto. La relazione che descrive questo tipo di urto è

$$v_{f1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

Le due velocità iniziali sono uguali e sappiamo che la $v_{f,1} = 0$ e che $v_{i,1} = -v_{i,2}$ (si scontrano infatti provenendo da versi opposti); pertanto, moltiplicando tutto per il denominatore comune

$$0 = (m_1 - m_2)\, v_{i,1} - 2m_2 v_{i,1}$$

da cui

$$m_1 v_{i,1} = 3m_2 V_{i,1}$$

semplificando e risolvendo rispetto a m_2

$$m_2 = \frac{1}{3} m_1 = 100\, g$$

Esercizio 25. Un carrello di massa $342\, g$ che corre su una guida a cuscino d'aria priva di attrito alla velocità iniziale di $1,24\, {}^{m}/_{s}$ investe un altro carrello fermo, di massa ignota. L'urto è elastico. Dopo l'urto il primo carrello continua la sua corsa nella stessa direzione alla velocità di $0,636\, \frac{m}{s}$. Trovare la massa e la velocità del secondo carrello.

Soluzione. La descrizione è di un urto unidimensionale. La quantità di moto iniziale del primo carrello è

$$p_{i,1} = 0,342\,kg \times 1,24\,\frac{m}{s} = 0,424\,kg\frac{m}{s}$$

il secondo carrello essendo inizialmente fermo avrà $p_{i,2} = 0$. La quantità di moto totale è pertanto pari a $0,424\,kg\frac{m}{s}$. Dopo l'urto la quantità di moto del primo carrello è

$$p_{f,1} = 0,342\,kg \times 0,636\,\frac{m}{s} = 0,218\,kg\frac{m}{s}$$

la quantità di moto del secondo carrello sarà

$$p_{f,2} = (0,424 - 0,218) = 0,206\,kg\frac{m}{s}$$

ma dalle relazioni dell'urto unidimensionale riferite al centro di massa, abbiamo

$$v_{f,1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i,1}$$

per cui

$$(m_1 + m_2)\,v_{f,1} = (m_1 - m_2)\,v_{i,1} \quad m_1\,(v_{f,1} - v_{i,1}) = -m_2\,(v_{i,1} + v_{f,1})$$

$$m_2 = m_1 \frac{v_{i,1} - v_{f-1}}{v_{i,1} + v_{f,1}} = 0,342 \frac{1,24 - 0,636}{1,24 + 0,636} = 0,110\,kg$$

per cui

$$v_{f,2} = \frac{p_{f,2}}{m_2} = \frac{0,206}{0,110} = 1,87\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 26. Un vagone merci di massa $31800\,kg$ viaggiando alla velocità di $1,50\,\mathrm{m/s}$ ne tampona un altro di massa $24200\,kg$ che viaggia alla velocità di $0,90\,\mathrm{m/s}$ nella stessa direzione. Trovare le velocità finali dei due vagoni ammesso che rimangano agganciati.

Soluzione. Le quantità di moto iniziali sono

$$p_{i,1} = 31800 \times 1,50 = 47700\,kg\frac{m}{s}$$

$$p_{i,2} = 24200 \times 0,90 = 21780\,kg\frac{m}{s}$$

da cui

$$p_{i,1} + p_{i,2} = (47700 + 21780) = 69480\,kg\frac{m}{s}$$

tale sarà anche la quantità di moto finale dei due vagoni, i quali essendo agganciati avranno la stessa velocità

$$p_{f,1+2} = (m_1 + m_2)\,v_f$$

pertanto

$$v_f = \frac{p_{f,1+2}}{m_1 + m_2} = \frac{69480}{56000} = 1,24\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 27. Durante un violento temporale chicchi di grandine del diametro di $1,0\,cm$ cadono alla velocità di $25\,\mathrm{m/s}$ nel numero stimato di 120 per m^3 d'aria. (Si trascuri il rimbalzo della grandine al suolo). Trovare la massa di ogni chicco; la forza esercitata dalla grandine su un tetto piano di $10\,m \times 20\,m$. Si ammette che la grandine abbia una massa volumica di $0,92\,\mathrm{g/cm^3}$.

Soluzione. Se ogni chicco ha un diametro di $1,0\,cm$, il suo volume, considerato come quello di una sfera, sarà

$$V_{chi} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(0,5\,cm\right)^3 = 0,52\,cm^3$$

Se la massa volumica è quella indicata, ogni chicco avrà una massa di

$$m_{chi} = V\rho = 0,52\,cm^3 \times 0,92\,\frac{g}{cm^3} = 0,48\,g$$

Se ve ne sono 120 per m^3, essi avranno un volume complessivo di $62,4\,cm^3$ per ogni m^3.

Il tetto in questione ha una superficie di $200\,m^2$; se prendiamo una massa d'aria sopra il tetto dell'altezza di $25\,m$ (in base alla velocità, ogni chicco percorre $25\,m$ in un secondo), avremo un volume complessivo di $5000\,m^3$ e in questo volume avremo

$$n_{chi} = 120\,m^{-3} \times 5000\,m^3 = 6,00 \cdot 10^5$$

Ogni chicco ha una quantità di moto iniziale

$$p_{chi} = 0,48\,g \times 25\,\frac{m}{s} = 12\,g\frac{m}{s}$$

se trascuriamo il rimbalzo, la quantità di moto finale sarà nulla e quindi $\Delta p = 1,20 \cdot 10^{-2}\,kg\frac{m}{s}$, e quindi

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1,20 \cdot 10^{-2}\,kg\frac{m}{s} \times 6,00 \cdot 10^5}{1\,s} = 7200\,N$$

Esercizio 28. Una scatola è appoggiata su una bilancia tarata a zero a scatola vuota. Si versa nella scatola da un'altezza di $h = 9,62\,m$ un flusso di biglie, ciascuna di massa $m = 4,60\,g$, al ritmo di $R = 115\,s^{-1}$ biglie. Gli urti sono completamente anelastici: si suppone che le biglie aderiscano al fondo della scatola senza rimbalzi. Trovare il peso indicato dalla bilancia al tempo $6,50\,s$ dall'inizio della caduta delle biglie.

Soluzione. Il peso delle biglie nella scatola dopo t secondi è $P_b = Rmgt$ (mg è il peso di ogni biglia). Esse raggiungeranno il fondo della scatola partendo dall'altezza h con una velocità (utilizzando le leggi del moto uniformemente accelerato) $v = \sqrt{2hg}$

La quantità di moto al momento dell'impatto di ogni biglia è $p_b = mv = m\sqrt{2hg}$. Tenendo conto del ritmo con cui cadono e del tempo in cui avviene questo fenomeno, la quantità di moto totale è

$$p_{tot} = Rm\sqrt{2gh}t$$

Le biglie si fermano dopo l'impatto (quantità di moto finale nulla) e quindi il fondo della scatola eserciterà una forza di frenamento pari a

$$F = \frac{\Delta p}{t} = Rm\sqrt{2gh}$$

Pertanto, la bilancia misurerà un peso dovuto alla forza di frenamento sommata al peso delle biglie

$$P_{tot} = Rmgt + Rm\sqrt{2gh} = Rm\left(gt + \sqrt{2gh}\right)$$

sostituendo i valori assegnati, si ha

$$P_{tot} = 4,60 \cdot 10^{-3}\,kg \times 115\left(9,81\,\frac{m}{s^2} \times 6,50\,s + \sqrt{2 \times 9,81\,\frac{m}{s^2} \times 9,62\,m}\right) = 41,0\,N$$

Altro modo (come il mio aggiungendo alla fine il peso delle biglie)

Esercizio 29. Due veicoli A e B, che viaggiano uno verso ovest e l'altro verso nord, raggiungono un incrocio nel quale si scontrano rimanendo incastrati fra loro. Prima dello scontro la velocità di A, di massa $m_A = 1232\,kg$, è di $62\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{h}}$, mentre quella di B, di massa $m_B = 1650\,kg$ è di $93,3\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{h}}$. Trovare intensità e direzione della velocità comune ai due veicoli subito dopo l'urto.

Soluzione. Indicate con x la retta lungo la quale si muove il veicolo A e con y quella in cui si muove il veicolo B, le quantità di moto iniziali sono

$$\overrightarrow{p}_A = m_A\left(v_{Ax}\overrightarrow{i} + v_{Ay}\overrightarrow{j}\right) = 1232\,kg\left(\frac{62}{3,6}\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{i} = \left(21218\,kg\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{p}_B = m_B\left(v_{Bx}\overrightarrow{i} + v_{By}\overrightarrow{j}\right) = 1650\,kg\left(\frac{93,3}{3,6}\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{j} = \left(42763\,kg\frac{m}{s}\right)\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{p}_{i,tot} = \overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{p}_B = 21218\,\overrightarrow{i} + 42763\,\overrightarrow{j}$$

il modulo di questa quantità di moto è

$$p_{i,tot} = \sqrt{21218^2 + 42763^2} = 47738\,kg\frac{m}{s}$$

La quantità di moto finale deve essere la stessa, per cui

$$v_f = \frac{p_{tot}}{m_A + m_B} = \frac{47738}{(1232 + 1650)} = 16,6\,\frac{m}{s} = 59,7\,\frac{km}{h}$$

e la direzione è data dall'angolo

$$\beta = \arctan\frac{42763}{21218} = 63°,6$$

verso sud-ovest.

Esercizio 30. In una partita di biliardo la palla d'inizio ne colpisce un'altra ferma, e prosegue alla velocità di $3,50\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$ su una linea che forma un angolo di $65,0°$ con la sua direzione primitiva, mentre la seconda acquista la velocità di $6,75\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$. Utilizzando il principio di conservazione della quantità di moto trovare (a) l'angolo fra la direzione del moto della seconda palla e quella iniziale della prima e (b) la velocità iniziale della prima.

Soluzione. Supponiamo che entrambe la palle abbiano la stessa massa m. La prima palla ha una quantità di moto iniziale

$$p_{i,1} = mv_1$$

mentre la seconda palla ha una quantità di moto iniziale $p_{i,2} = 0$. Assegniamo alla direzione iniziale la retta x. Dopo l'urto la prima palla acquista una componente y di un valore tale che il vettore della quantità di moto formi un angolo di $65,0°$ con la direzione dell'asse x

$$p_{1x}^f = m \cdot 3,50 \sin 65,0 = m \cdot 3,17\,kg\frac{m}{s}$$

ma prima dell'urto la componente lungo y della quantità di moto totale era nulla, per cui la seconda palla avrà una componente y della quantità di moto uguale e opposta, cioè $p_{2,y}^f = -m \cdot 3,17$, per cui

$$-m \cdot 3,17 = m \cdot 6,75 \sin\beta$$

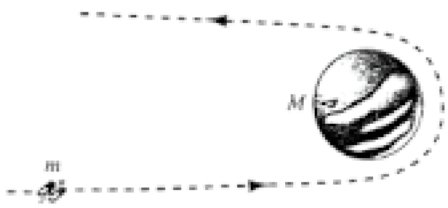
da cui

$$\beta = \arcsin -\frac{3,17}{6,75} = -28^\circ$$

Applichiamo la legge di conservazione alla componente x, dividendo per la massa comune e avendo quindi una relazione sulle sole velocità

$$3,50\cos 65^\circ + 6,75\cos\left(-28^\circ\right) = 7,44\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 31. La sonda spaziale Voyager 2 (massa m e velocità v rispetto al Sole) si avvicina al pianeta Giove (massa M e velocità V, sempre rispetto al Sole), come in figura. La sonda gira intorno al pianeta e prosegue nella direzione opposta. Trovare la sua velocità rispetto al Sole dopo questo incontro " a fionda". Poniamo $v = 12\,\mathrm{km/s}$ e $V = 13\,\mathrm{km/s}$ (la velocità orbitale di Giove), e supponiamo che so tratti di un urto elastico. La massa di Giove è molto maggiore di quella della sonda ($M \gg m$).



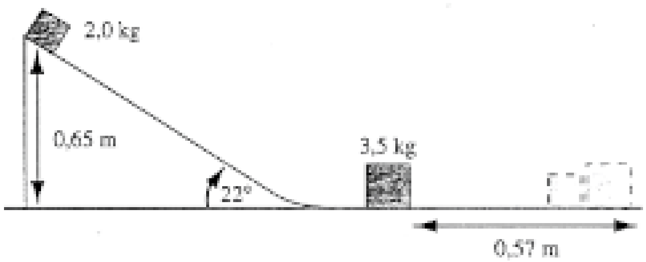
Soluzione. Se la direzione della sonda rimane approssimante la stessa ma con verso opposto, possiamo trattare l'urto come unidimensionale e, ricordando la relazione che descrive questo caso, abbiamo

$$v_f = \frac{m-M}{m+M}v_i + \frac{2M}{m+M}V_i$$

ma se $M \gg m$, si ha

$$v_f = 2V_i - v_i = 2\times 13 - (-12) = 38\,\frac{km}{s}$$

Esercizio 32. Un blocco di $2,0\,kg$ parte da fermo, senza attrito, lungo un piano inclinati di 22° rispetto al piano orizzontale dall'altezza di $0,65\,m$, come in figura. All'arrivo sul piano a quota zero urta, attaccandovisi, un blocco di massa $3,5\,kg$. I due blocchi congiunti slittano per una distanza di $0,57\,m$ sul piano orizzontale fino ad arrestarsi. Trovare il coefficiente di attrito della superficie orizzontale.



Soluzione. Il blocco avrà al termine della discesa una velocità di $v_i = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \times 0,65 \times 9,81} = 3,6\,\frac{m}{s}$. Di conseguenza avrà una quantità di moto pari a

$$p_{i,1} = 2,0 \times 3,6 = 7,2\,kg\frac{m}{s}$$

mentre il secondo blocco avrà una quantità di moto nulla. Pertanto la quantità di moto iniziale complessiva sarà di

$$p_i = 7,2\,kg\frac{m}{s}$$

dopo l'urto avremo due blocchi uniti che dovranno avere una quantità di modo uguale a quella indicata e quindi una velocità di

$$v_f = \frac{p_i}{M} = \frac{7,2\,kg\frac{m}{s}}{5,5\,kg} = 1.31\,\frac{m}{s}$$

dove M è la somma delle due masse. In assenza di attrito i due blocchi uniti continuerebbero il loro moto rettilineo uniforme con la stessa velocità, ma nel nostro caso si fermano dopo $0,57\,m$; applicando quindi le leggi del moto uniformemente accelerato, subiranno una decelerazione

$$v_f^2 = v_i^2 - 2as$$

da cui

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{-2s} = \frac{0 - 1,31^2}{-2 \times 0,57} = 1,51\,\frac{m}{S^2}$$

tale decelerazione è prodotta dalla forza d'attrito, $Ma = F_a = \mu Mg$ da cui

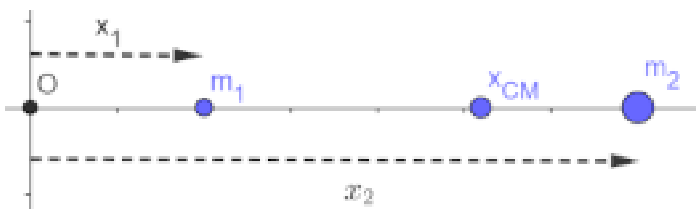
$$\mu = \frac{\cancel{M}a}{\cancel{M}g} = \frac{1,51}{9,81} = 0,15$$

Esercizio 33. Dimostrare che il rapporto tra le distanze d_1 e d_2 di due particelle dal loro centro di massa è uguale all'inverso del rapporto tra le loro masse.

Soluzione. Il centro di massa tra due particelle è espresso dalla media pesata sulle masse delle distanze dall'origine del riferimento

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

dove le grandezze indicate sono ottenibili dalla figura sottostante.



Detta d_1 la distanza tra m_1 e il centro di massa e d_2 quella tra m_2e il centro di massa, la distanza tra m_1 e il centro di massa è

$$d_1 = x_{CM} - x_1 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 - x_1 m_1 - x_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

analogamente

$$d_2 = x_2 - x_{CM} = \frac{x_2 m_1 + x_2 m_2 - x_1 m_1 - x_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

il loro rapporto sarà quindi

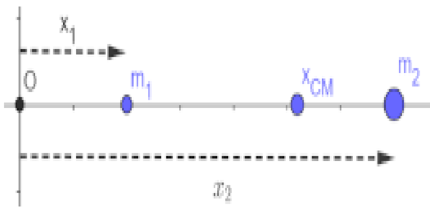
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 (x_2 - x_1)} = \frac{m_2}{m_1}$$

Esercizio 34. Dimostrare che il rapporto tra le distanze d_1 e d_2 di due particelle dal loro centro di massa è uguale all'inverso del rapporto tra le loro masse.

Soluzione. Il centro di massa tra due particelle è espresso dalla media pesata sulle masse delle distanze dall'origine del riferimento

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

dove le grandezze indicate sono ottenibili dalla figura sottostante.



Detta d_1 la distanza tra m_1 e il centro di massa e d_2 quella tra m_2e il centro di massa, la distanza tra m_1 e il centro di massa è

$$d_1 = x_{CM} - x_1 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 - x_1 m_1 - x_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

analogamente

$$d_2 = x_2 - x_{CM} = \frac{x_2 m_1 + x_2 m_2 - x_1 m_1 - x_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

il loro rapporto sarà quindi

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 (x_2 - x_1)} = \frac{m_2}{m_1}$$

Esercizio 35. Una Jaguar di massa $2210\,kg$ viaggia su una strada rettilinea alla velocità di $105\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$. La segue una Ford di massa $2080\,kg$ alla velocità di $43\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$. Determinare la velocità del centro di massa del sistema costituito dalle due autovetture.

Soluzione. In questo caso la velocità del centro di massa va mediata ancora rispetto alla massa, come nel caso della posizione, per cui

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2210\,kg \times 105\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}} + 2080\,kg \times 43\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}}{(2210 + 2080)\ kg} = 75\,\frac{km}{h}$$

Esercizio 36. Due pattinatori di masse $65\,kg$ e $42\,kg$, in piedi su una pista ghiacciata, reggono dalle due estremità un bastone di lunghezza $9,7\,m$ e massa trascurabile. Tirando il bastone verso di sé ciascun pattinatore avanza verso l'altro fino a toccarsi. A quanto ammonta lo spostamento complessivo del pattinatore più leggero?

Soluzione. I due pattinatori si incontreranno nel centro di massa. La distanza percorsa dal pattinatore con la massa inferiore dovrà essere la maggiore e richiamando la dimostrazione dell'es. 1, vediamo che la distanza da esso percorsa è

$$d = \frac{m_2\,(x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} = \frac{65 \times 9,7}{107} = 5,9\,m$$

Esercizio 37. Due particelle P e Q di masse $1,43\,kg$ e $4,29\,kg$ sono a riposo a distanza mutua di $1,64\,m$. Le due particelle si scambiano una forza attrattiva di intensità pari a $1,79 \cdot 10^{-2}\,N$. Assumendo che sul sistema non agiscano forze esterne (a) descrivere il moto del centro di massa; (b) determinare a quale distanza dalla posizione iniziale P avviene la collisione tra le due particelle.

Soluzione. La particella P si sposterà soggetta ad un'accelerazione

$$a_P = \frac{F}{m_P} = \frac{1,79 \cdot 10^{-2}\,N}{1,43\,kg} = 1.25 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s^2}$$

analogamente

$$a_Q = \frac{F}{m_Q} = \frac{-1,79 \cdot 10^{-2}\,N}{4,29\,kg} = -4,17 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$$

la forza sulle due particelle è la stessa in modulo ma opposta in verso, e pertanto il centro di massa avrà un'accelerazione nulla

$$a_{CM} = \frac{m_P a_P + m_Q a_Q}{m_P + m_Q} = \frac{1,79 \cdot 10^{-2}\,N - 1,79 \cdot 10^{-2}\,N}{5,72\,kg} = 0$$

per trovare la distanza alla quale avviene la collisione abbiamo sempre

$$d = \frac{m_Q\,(x_Q - x_P)}{m_P + m_Q} = \frac{4,29 \times 1,64}{5,72} = 1,23\,m$$

Esercizio 38. Un proiettile viene sparato da un cannone, posto a terra, con alzo di $57,4°$ e velocità di modulo $466\,{}^{m}/_{s}$. Giunto al vertice della sua traiettoria, il proiettile esplode e si suddivide in due frammenti di massa uguale. Subito dopo l'esplosione, uno dei due frammenti ha velocità nulla e, quindi, cade verticalmente. Trovare la distanza orizzontale tra i punti di caduta dei due frammenti.

Soluzione. Ricordiamo che l'altezza massima raggiunta dal proiettile (senza tener conto di attriti) non è altro che il vertice della parabola descritta dallo stesso; la legge che descrive il moto del proiettile è

$$y\,(x) = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

dalla geometria analitica abbiamo

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\tan\theta}{2\cdot\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

e sostituendo tale valore a x

$$y\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

[per chi conosce l'analisi, il vertice è un punto di massimo che si ottiene annullando la derivata prima

$$y'(x) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{2gx}{2v_0^2\cos^2\theta} = 0$$

da cui

$$x = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

ecc...]. Pertanto le coordinate del vertice (ponendo l'origine nel punto di uscita del proiettile) sono

$$V\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\right) = \left(\frac{466^2\times 0,91}{19,6}, \frac{466^2\times 0,71}{19,6}\right) = \left(1,00\cdot 10^4; 7,85\cdot 10^3\right)$$

Il frammento con caduta verticale raggiungerà il suolo a una distanza di $1,00\cdot 10^4\,m$. Il centro di massa,che descrive il percorso parabolico, raggiungerà terra alla distanza data dalla cosiddetta gittata,

$$R = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} = \frac{466^2\times\sin(114,8)}{9,81^2} = 2,01\cdot 10^4\,m$$

Pertanto, il secondo frammento atterrerà nel punto tale che

$$2,01\cdot 10^4 = \frac{(1,0\cdot 10^4 + x)}{2}$$

da cui $x = 3,02\cdot 10^4\,m$.

Esercizio 39. Un cane di massa pari a $5,0\,kg$ si trova su una barca a $7,0\,m$ dalla riva. Il cane percorre $2,8\,m$ sulla barca verso la riva. Sapendo che la barca ha una massa di $21\,kg$ e assumendo che non vi sia attrito tra essa e la superficie dell'acqua, si determini la distanza finale tra il cane e la riva.

Soluzione. Il centro di massa del sistema cane più barca non si muove non essendoci l'azione forze di esterne in grado modificare lo stato del sistema. Pertanto la variazione del centro di massa dovrà essere nulla.

$$\Delta x_{CM} = \frac{m_c\Delta x_c + m_b\Delta x_b}{m_c + m_b} = 0$$

il problema ci chiede di misurare le due variazioni del cane e della barca rispetto alla riva. Ora lo spostamento del cane rispetto alla barca è $\Delta x_{cb} = -2,8\,m$ (supponiamo il verso positivo quello che si allontana dalla riva). Quindi

$$\Delta x_c = \Delta x_{cb} + \Delta x_b$$

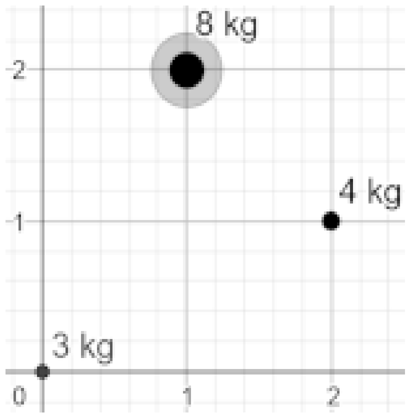
sostituendo nella variazione del centro di massa

$$0=\frac{m_c\Delta x_c+m_b\left(\Delta x_c-\Delta x_{cb}\right)}{m_c+m_b}=\frac{m_c\Delta x_c+m_b\Delta x_c-m_b\Delta x_{cb}}{m_c+m_b}$$

risolviamo rispetto a Δx_c,

$$\Delta x_c=\frac{-m_b\Delta x_{cb}}{m_c+m_b}=-\frac{21\times(-2,8)}{23,8}=2,5\,m$$

Esercizio 40. Determinare il centro di massa del sistema costituito dalle tre particelle disposte come in figura.

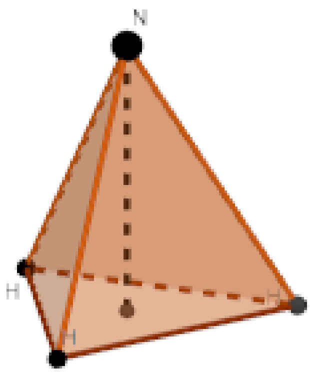


Soluzione. In questo caso abbiamo non più due corpi, comunque allineati e quindi è necessario studiare la posizione del centro di massa considerando le sue coordinate lungo l'asse x e quello y.

$$x_{CM}=\frac{3\times0+8\times1+4\times2}{(3+8+4)\,m}=1,07\,m$$

$$y_{CM}=x_{CM}=\frac{3\times0+8\times2+4\times1}{(3+8+4)\,m}=1,33\,m$$

Problema. Nella molecola di ammoniaca NH_3 i tre atomi di idrogeno H formano un triangolo equilatero di lato $16,28\cdot10^{-11}\,m$; il centro del triangolo dista, quindi, $9,40\cdot10^{-11}\,m$ da ciascun atomo di idrogeno. L'atomo di azoto N costituisce il vertice di una piramide la cui base è individuata dal triangolo formato dai tre atomi di idrogeno. La distanza tra l'atomo di azoto e ciascuno dei tre atomi di idrogeno vale $10,14\cdot10^{-11}\,m$; il rapporto tra la massa atomica dell'azoto e quella dell'idrogeno è $13,9$. Determinare la distanza del centro di massa della molecola d'azoto.



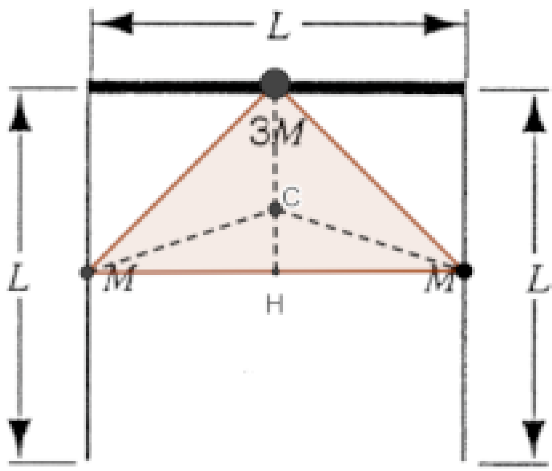
Soluzione. Questo è un caso tridimensionale. Nel triangolo equilatero di base il centro del triangolo è un punto notevole (qui ortocentro, baricentro e incentro coincidono). La distanza tra l'atomo N e gli atomi H alla base è lo spigolo della piramide. Il centro di massa degli atomi idrogeno sarà nel baricentro. Pensiamo al centro di massa della base come a un corpo che sostituisce i tre atomi di idrogeno. Pertanto, possiamo trovare il centro di massa della piramide come quello tra due corpi, il centro di massa della base e l'atomo di azoto. Esso sarà disposto lungo l'asse verticale. L'altezza della piramide si può ottenere dal th. di Pitagora

$$h = \sqrt{(10,14 \cdot 10^{-11})^2 - (9,41 \cdot 10^{-11})^2} = 3,78 \cdot 10^{-11}\, m$$

Se poniamo l'origine nel baricentro della base

$$y_{CM} = \frac{m_N y_N + m_h y_H}{m_h + m_N} = \frac{13,9 m_N \times 0 + 3m_h \times 3,78 \cdot 10^{-11}\, m}{16,9 m_h} = 6,71 \cdot 10^{-12}\, m$$

Esercizio 41. Tre sbarrette di lunghezza L sono state saldate come mostrato in figura; le due sbarrette che costituiscono le braccia della U hanno massa M, mentre la terza sbarretta (orizzontale) ha massa $3M$. Determinare il centro di massa dell'intero oggetto.

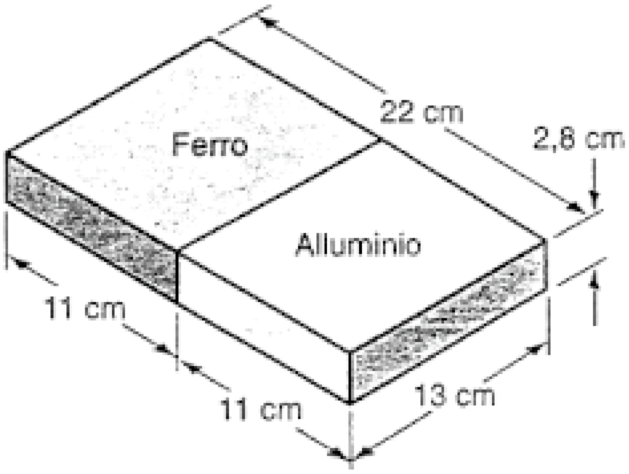


Soluzione. [Risolviamo richiamando alcune proprietà geometriche] Ammesso che le sbarre abbiano singolarmente una distribuzione uniforme della massa, il loro centro di massa si troverà nel loro punto medio. Essi formeranno i vertici di un triangolo isoscele con base lunga L, l'altezza $\frac{L}{2}$ e i lati obliqui $\frac{L}{2}\sqrt{2}$. Il centro di massa del sistema sarà pertanto il baricentro di questo triangolo, cioè il punto di intersezione delle mediane dei lati e si troverà sull'altezza del triangolo (asse di simmetria della figura). La distanza della massa $3M$ sarà quindi $\frac{L}{3}$. Se poniamo l'origine nella massa M a sx nella figura, avremo

$$x_{CM} = \frac{M \cdot 0 + M \cdot L + 3M \cdot \frac{L}{2}}{5M} = \frac{L}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{M \cdot 0 + M \cdot 0 + 3M \cdot \frac{L}{3}}{5M} = \frac{L}{5}$$

Esercizio 42. La figura mostra una sbarra composita di dimensioni $22,0\,cm \cdot 13,0\,cm \cdot 2,80\,cm$. Essa è costituita per metà di alluminio (massa volumica $= 2,70\,{}^{g}/{}_{cm^3}$) e per metà di ferro (massa volumica $= 7,85\,{}^{g}/{}_{cm^3}$). Determinare la posizione del centro di massa della sbarra.



Soluzione. Anche in questo caso possiamo considerare la materia distribuita uniformemente in ogni pezzo della sbarra. Pertanto il centro di massa delle due parti sarà posto nel loro baricentro, cioè nel punto in cui si intersecano le diagonali dei due parallelepipedi. Se scegliamo come asse x la dimensione maggiore, come asse y quella minore e indichiamo con z l'asse verticale al piano xy, la distanza tra i due centri di massa sarà pari quindi a $11\,cm$ lungo l'asse x, a $6,5\,cm$ lungo l'asse y e $1,4\,cm$ lungo l'asse z. Calcoliamo le masse delle due parti

$$m_{Al} = \rho V = 2,70\,\frac{g}{cm^3} \times \frac{(22,0 \cdot 13,0 \cdot 2,80)\ cm^3}{2} = 1081\,g$$

$$m_{Fe} = \rho V = 7,85\,\frac{g}{cm^3} \times \frac{(22,0 \cdot 13,0 \cdot 2,80)\ cm^3}{2} = 3143\,g$$

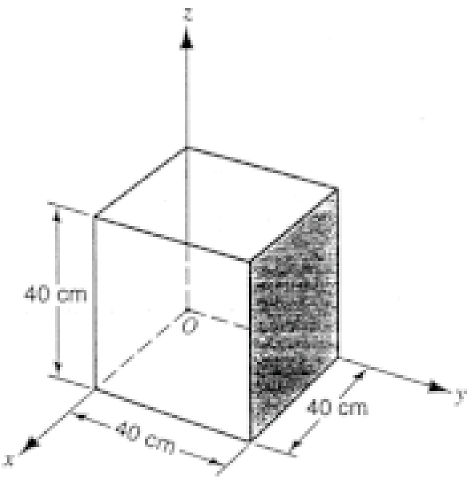
Se poniamo l'origine degli assi nel centro di massa del pezzo di ferro, avremo

$$x_{CM}^{sb} = \frac{m_{Fe}x_{Fe} + m_{Al}x_{Al}}{m_{Fe} + m_{Al}} = \frac{0 + 1081 \times 11}{4224} = 2,82\,cm$$

$$y_{CM}^{sb} = \frac{m_{Fe}y_{Fe} + m_{Al}y_{Al}}{m_{Fe} + m_{Al}} = \frac{0 + 1081 \times 6,5}{4224} = 1,66\,cm$$

$$z_{CM}^{sb} = \frac{m_{Fe}z_{Fe} + m_{Al}z_{Al}}{m_{Fe} + m_{Al}} = \frac{0 + 1081 \times 1,4}{4224} = 0,36\,cm$$

Esercizio 43. Una scatola ha forma cubica ed è priva della faccia superiore. La scatola è stata ottenuta ripiegando un sottile foglio metallico. Sapendo che lo spigolo del cubo è di $40\,cm$, determinare la posizione del centro di massa facendo uso del sistema di riferimento mostrato in figura.



Soluzione. Tenendo conto della geometria della scatola, il centro di massa di ogni faccia si trova nell'intersezione delle diagonali di ognuna di esse. Mancando la base superiore, la base inferiore non ha simmetrico, quindi il centro di massa effettivo si troverà spostato verso il basso rispetto al baricentro del cubo. Il centro di massa delle facce della superficie laterale sarà nel baricentro del cubo. Il centro di massa del cubo, calcolato rispetto al sistema di coordinate in figura sarà quindi quello tra due corpi, uno formato dal centro di massa delle quattro facce laterali con la massa tutta concentrata nel baricentro del cubo e l'altro nel centro del quadrato di baso con la massa di una faccia concentrata in questo punto, disposti lungo una retta parallela all'asse z e passante per il centro della base

$$z_{CM}=\frac{4m_{base}z_{sl}+m_{base}z_{base}}{m_{sl}+m_{base}}=\frac{4m_{base}\cdot 20+m_{base}\cdot 0}{5m_{base}}=16\,cm$$

Per quanto detto tendendo conto delle proprietà geometriche della figura

$$x_{CM}=y_{CM}=20\,cm$$

Esercizio 44. Un vascello, fermo rispetto a un riferimento terrestre, esplode e si divide in tre pezzi. Due di essi, uno dei quali ha massa pari al doppio dell'altro, vengono scagliati lungo direzioni mutuamente ortogonali, entrambi con velocità $31,4\,{}^{m}\!/_{s}$. Il terzo pezzo ha massa pari a tre volte la massa del pezzo più leggero. Determinare la direzione e il modulo della velocità del terzo pezzo subito dopo l'esplosione. Specificare la direzione calcolando l'angolo formato dalla velocità in questione con la direzione di volo del pezzo più leggero.

Soluzione. La massa totale del vascello è pari a 6 volte la massa del pezzo più leggero. Non essendo indicate forze esterne il centro di massa rimarrà fermo rispetto al riferimento terrestre. La quantità di moto totale dovrà quindi mantenersi nulla rispetto al riferimento.

$$P=m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3=0$$

Sia m la massa dell'elemento più leggero

$$m\,(31,4)\,\overrightarrow{i}+2m\,(31,4)\,\overrightarrow{j}+3mv_3=0$$

da cui

$$v_3=\frac{-m\,(31,4)\,\overrightarrow{i}-2m\,(31,4)\,\overrightarrow{j}}{3m}=\left(-10,4\,\overrightarrow{i}-20,9\,\overrightarrow{j}\right)\,\frac{m}{s}$$

Il modulo della velocità sarà quindi

$$v_3 = \sqrt{(-10,4)^2 + (-20,9)^2} = 23,3\,\frac{m}{s}$$

e l'angolo formato

$$\beta = \arctan\frac{-20,9}{-10,4} = 63,5°$$

Esercizio 45. Dodici contenitori di massa $100,0\,kg$ ciascuno sono tenuti assieme nello spazio interstellare per mezzo di catene vincolate a un punto comune. Il centro di massa del sistema è inizialmente a riposo. Uno dei contenitori viene colpito in modo plastico da un corpo di massa $50\,kg$ in moto alla velocità di $80\,\mathrm{m/s}$, rimanendone attaccato. Determinare la velocità del centro di massa del sistema costituito dai dodici contenitori dopo la collisione supponendo che tutte le catene restino intatte.

Soluzione. Se consideriamo il sistema costituito dai dodici contenitori e dal corpo urtante, allora tutte le forze che agiscono sono interne al sistema la la quantità di moto del sistema si conserva. Prima dell'urto la quantità di moto è data da

$$p_i = 1200\,kg \times 0\,\frac{m}{s} + 50\,kg \times 80\,\frac{m}{s} = 4000\,kg\frac{m}{s}$$

Dopo l'urto avremo

$$4000\,kg\frac{m}{s} = 1250\,kg \cdot v\,\frac{m}{s}$$

da cui

$$v = \frac{4000\,kg\frac{m}{s}}{1250\,kg} = 3,2\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 46. Durante una missione lunare si rende necessario correggere di $22,6\,\mathrm{m/s}$ la velocità della navicella, in moto alla velocità di $388\,\mathrm{m/s}$. La velocità di espulsione dei gas di scarico è uguale a $1230\,\mathrm{m/s}$. Calcolare la frazione della massa iniziale che deve essere espulsa.

Soluzione. In questo caso abbiamo un sistema la cui massa varia per l'espulsione, tramite combustione, di una massa di gas di scarico. Il gas porterà con sé una parte della quantità del sistema. Supponiamo che il gas di scarico si muova nella direzione della navicella ma in verso opposto. La relazione che descrive questa condizione è data da

$$v_f - v_i = v_{rel}\ln\frac{M_f}{M_i}$$

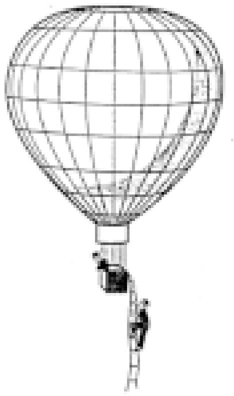
da cui

$$\frac{M_f}{M_i} = e^{-\frac{v_f - v_i}{v_{rel}}} = e^{-\frac{22,6}{1230}} = 0,982$$

pertanto la frazione di massa espulsa rispetto alla massa iniziale (presa come totale) sarà

$$1 - 0,982 = 0,0182$$

Esercizio 47. Un uomo di massa m si trova su una scala di corda sospesa a una mongolfiera, a riposo rispetto a un riferimento terrestre. Se l'uomo inizia a salire con velocità v rispetto alla scala, determinare in quale direzione e con quale velocità si muoverà la mongolfiera rispetto al suolo.



Soluzione. Il sistema uomo-mongolfiera non è soggetto a forze esterne e quindi la quantità di moto totale si conserva. L'uomo si sposta in direzione verticale rispetto al riferimento terrestre e pertanto la mongolfiera si muoverà nella stessa direzione ma con verso contrario. La velocità è legata al rapporto tra le due masse. Se M la massa della mongolfiera, avremo

$$(M+m)\,V_i = mv - (M+m)\,V_f$$

cioè

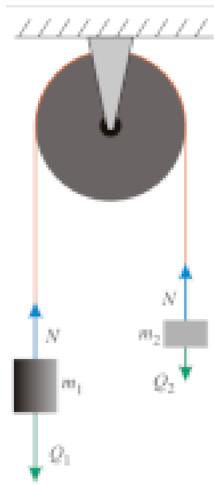
$$V_f = \frac{m}{M+m}v$$

Esercizio 48. Due piatti, aventi la stessa massa complessiva di $850\,g$ ciascuno, sostengono pesi da bilancia e sono connessi per mezzo di una corda leggera che passa su una puleggia liscia di diametro pari a $56,0\,mm$, anch'essa di massa trascurabile. I due corpi sono inizialmente alla stessa quota. (a) Trovare la posizione iniziale del centro di massa del sistema costituito dai due piatti. (b) $34\,g$ vengono trasferiti da un piatto all'altro facendo attenzione che le posizioni dei due piatti restino invariate. Determinare la posizione del centro di massa.

Soluzione. (a) Il centro di massa sarà posto nel punto medio della distanza che separa i due piatti. (b) Se i due piatti vengono mantenuti nella stessa posizione iniziale e considerando tutta la massa di ogni piatto condensata nel loro punto medio, allora la distanza che li separa è sempre pari a $56,0\,mm$ e prendendo come riferimento il baricentro del piatto più pesante (immaginato a sx), avremo

$$x_{CM} = \frac{56,0\,mm \times (850-34)\;g}{1700\,g} = 26,1\,mm$$

cioè il centro di massa è un poco più vicino al piatto più pesante, cioè di $28,0-26,1=1,9\,mm$. (c) se i piatti sono liberi di muoversi, abbiamo un fenomeno che viene analizzato con la cosiddetta macchina di Atwood.



Se le masse del filo e della puleggia sono trascurabili, le forze che agiscono, come descritto in figura, sono (il piatto più pesante è attratto in basso, mentre quello con massa minore sale verso l'alto, tramite la mediazione del filo)

$$F_1 = T - m_1 g \quad F_2 = m_2 g - T$$

per cui, la somma delle forze

$$\sum F = Ma = F_1 + F_2 = g\,(m_2 - m_1)$$

da cui, essendo $M = m_1 + m_2$, l'accelerazione del centro di massa

$$a = 2g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 2 \times 9,81\,\frac{m}{s^2}\frac{34\,g}{1750\,g} = 0,381\,\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 49. Una slitta a reazione di massa $2870\,kg$ si muove su binario alla velocità di $252\,{}^{m}/_{s}$. A un certo punto una pala posta sulla slitta si abbassa immergendosi in un corso d'acqua che scorre tra le rotaie e pesca dell'acqua trasferendola all'interno di un contenitore, anch'esso posto sulla slitta. Calcolare la velocità della slitta dopo che $971\,kg$ d'acqua sono stati introdotti nel contenitore.

Soluzione. La quantità di moto iniziale è pari a

$$p_i = 2870\,kg \times 252\,\frac{m}{s} = 7,23 \cdot 10^5\,kg\frac{m}{s}$$

la quantità di moto finale è

$$p_f = (2870 + 971)\;kg \times v_f\,\frac{m}{s}$$

pertanto se nel sistema la quantità di moto si conserva, avremo

$$v_f = \frac{7,23 \cdot 10^5\,kg\frac{m}{s}}{3841\,kg} = 188\,\frac{m}{s}$$